ECRICOME

Banque d'épreuves écrites communes aux concours des Ecoles EDHEC, ESC Reims, ESC Rouen, ICN

CONCOURS D'ADMISSION 1988

MATHEMATIQUES

DUREE : 4 heures - OPTION GENERALE

AUCUN DOCUMENT AUTORISE, HORMIS CEUX JOINTS AU SUJET (3 TABLES)

LES CANDIDATS sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, et à donner des démonstrations complètes (mais brèves) de leurs affirmations.

EXERCICE DE MATHEMATIQUES

1°) On pose $I(n,p) = \int_{-1}^{+1} (x-1)^n (x+1)^p \, dx$

où n et p désignent deux entiers naturels quelconques.

a) Etablir que pour $n \geqslant 1$ et p quelconque : $I(n,p) = -\frac{n}{p+1} I(n-1, p+1)$

b) Calculer, en fonction de n et p, $I(n,p)$ et préciser la valeur de $I(p,p)$.

2°) Soit L_n la fonction définie sur $[-1, +1]$ par $L_n(x) = \frac{d^n}{dx^n}\left[(x^2-1)^n\right]$

où $\frac{d^n}{dx^n}[f]$ désigne la dérivée n-ième d'une fonction f et où n est un entier naturel quelconque.

a) Calculer $L_0(x)$, $L_1(x)$, $L_2(x)$.

b) Démontrer que pour tout n, L_n est une fonction polynomiale de degré n dont on précisera le coefficient de x^n.

c) Montrer que pour n non nul et pour i prenant les valeur 0,1,..., n-1,

$\frac{d^i}{dx^i}\left[(x^2-1)^n\right]$ est un polynôme admettant -1 et 1 comme racines.

3°) Calculer pour $n \in \mathbb{N}$: $K_n = \int_{-1}^{+1} L_n(x) \cdot L_n(x) \, dx$

EXERCICE DE STATISTIQUES-PROBABILITES

LES QUESTIONS 2 et 3 SONT INDEPENDANTES DE LA PREMIERE.

Des messages codés à l'aide de 0 et de 1 sont envoyés régulièrement d'un point A vers un point B. La transmission de ces messages est affectée par des perturbations appelées bruit. Ce bruit Z suit une loi normale centrée réduite. Pour en atténuer les effets, le responsable de l'opération décide d'amplifier l'écart entre les deux valeurs émises en transmettant -1 au lieu de 0 et 2 à la place de 1.
Si E désigne la valeur émise en A (soit -1 ou 2), alors la valeur reçue en B est R = E+Z, somme des deux variables aléatoires E et Z.
La règle de décodage utilisée en B est la suivante :

- si R est supérieur à un seuil s positif ou nul, alors le message doit être interprété comme un 1,
- si $R < 0$ on retient 0
- si $0 \leqslant R < s$ le message ne peut pas être interprété correctement et l'opération correspondante est annulée.

Cette annulation coûte 200 unités. De même, si le message 0 est décodé comme 1 il en coûte 500 unités. Inversement, si le message 1 est décodé comme zéro, le coût associé est de 1000 unités.
80 % des messages transmis sont des 1 donc 80% des valeurs émises sont des 2.

1°) Quelle est la valeur du seuil s qui minimise l'espérance du coût ?

2°) Le seuil s étant dorénavant pris égal à zéro, on envoie de A vers B le message 1101001.
Quelle est la probabilité que le message ci-dessus soit correctement interprété en B ?

3°) Le message du 2°) décodé en B est réémis par B vers un autre lieu C dans les mêmes conditions que précédemment (s = 0).
Quelle est la probabilité que le message soit le même en A et en C ?

PROBLEME

LES PARTIES A et B sont largement indépendantes.

PREMIERE PARTIE - A

1°) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère le cercle de centre O, de rayon 1. On désigne par M_1, M_2, M_3, M_4 les points de ce cercle définis respectivement par les couples de coordonnées (1,0), (0,1), (-1,0), (0,-1)

Un point lumineux se déplace aléatoirement sur ce cercle.
A l'instant t = 0 il se trouve en M_1.

S'il se trouve à l'instant t = n en M_i il se positionnera à l'instant t = n+1 en l'un des deux points les plus proches de M_i avec une probabilité 1/2 pour chacun d'eux, il ne pourra donc pas se positionner au point diamétralement opposé à M_i.

On note α_n, β_n, γ_n et δ_n les probabilités pour qu'à l'instant t = n le point se trouve respectivement en M_1, M_2, M_3, M_4, et V_n la matrice unicolonne :

$$V_n = \begin{bmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \\ \gamma_n \\ \delta_n \end{bmatrix}$$

TS V.P.

a) Déterminer une matrice A telle que $V_{n+1} = A\,V_n$

b) En déduire V_n en fonction de A et n.

2°) On pose

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Calculer A^3

b) Expliciter A^n, n appartenant à $\mathbb{N}$, et préciser les valeurs de α_n, β_n, γ_n et δ_n. (question 1).

3°) Soit E un espace vectoriel de dimension 4 rapporté à une base B (e_1, e_2, e_3, e_4) et f l'endomorphisme dont la matrice relativement à la base B est A.

a) Déterminer le noyau Kerf et l'image Imf de l'endomorphisme f.

b) Montrer que E = Kerf $\oplus$ Imf.

c) Etablir l'existence d'une base B' = (e'_1, e'_2, e'_3, e'_4) de E telle que relativement à cette base B', l'endomorphisme f ait comme matrice

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

d) Déterminer les valeurs propres de l'endomorphisme f et donner, pour chaque valeur propre, le sous-espace propre associé.

e) Préciser une matrice de passage P de B à une base B" uniquement constituée de vecteurs propres.

f) Retrouver à l'aide de ce qui précède l'expression de A^n pour tout entier n appartenant à $\mathbb{N}$.

DEUXIEME PARTIE - B

Dans cette partie B, tout point M, d'un plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, ayant comme coordonnées (a,b) est associé à son affixe complexe $z = a + ib$, i désignant le complexe de module 1, d'argument $\pi/2$.

En désignant par n un entier naturel non nul, on note w le complexe de module 1, d'argument $\frac{2\pi}{n}$; on rappelle que $w^n = 1$.

1°) On considère de nouveau le problème étudié en A-1°) mais en supposant désormais que le point se déplace selon les règles suivantes :

- à l'instant t = 0, le point lumineux est en M_1

- Si à l'instant t = n le point lumineux est en un point du cercle dont l'affixe est d'argument θ, le point se placera à l'instant t = n+1 en un point du cercle dont l'argument sera $\theta + \frac{\pi}{2}$ avec la probabilité p ou $\theta - \frac{\pi}{2}$ avec la probabilité q = 1-p.

On note encore α_n, β_n, γ_n et δ_n les probabilités pour qu'à l'instant t = n le point lumineux se trouve respectivement en M_1, M_2, M_3, M_4, ainsi que $V_n = \begin{bmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \\ \gamma_n \\ \delta_n \end{bmatrix}$

a) Déterminer une matrice A telle que $V_{n+1} = A\,V_n$

b) Montrer que A admet comme vecteurs colonnes propres les vecteurs suivants :

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad C_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \\ -i \end{pmatrix} \quad C_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad C_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -1 \\ i \end{pmatrix}$$

et préciser les valeurs propres associées.

c) Montrer que les 4 vecteurs C_1, C_2, C_3, C_4 sont linéairement indépendants dans l'espace vectoriel des matrices de type (4,1) à coefficients complexes.

d) Soit V un vecteur colonne s'écrivant :

$$V = \sum_{k=1}^{4} \mu_k \cdot C_k \quad , \quad \text{où } \mu_k \in \mathbb{C} \quad \text{pour } k = 1,2,3,4.$$

Calculer AV puis $A^n V$ en fonction de C_1, C_2, C_3, C_4.

e) Déduire de ce qui précède α_n, β_n, γ_n et δ_n en fonction de n et de la probabilité p.

2°) Soit $z_1, z_2, \ldots z_n$ n complexes distincts 2 à 2.

Soit M la matrice :

$$M = \begin{bmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 & \cdots & z_1^{n-1} \\ 1 & z_2 & z_2^2 & \cdots & z_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & z_n & z_n^2 & \cdots & z_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

(z_k^{ℓ} se lit z_k élevé à la puissance ℓ)

TS.V.P.

a) Montrer que le rang de M est égal à celui de la matrice :

$$\begin{bmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 & z_1^3 & \cdots & z_1^{n-1} \\ 0 & 1 & z_2 & z_2^2 & \cdots & z_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & & & \\ 0 & 1 & z_n & z_n^2 & \cdots & z_n^{n-2} \end{bmatrix}$$

b) En déduire le rang de M.

3°) Soit A une matrice carrée d'ordre n de la forme

$$A = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & & & \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_0 \end{bmatrix}$$

où $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ désignent n nombres complexes.

a) Montrer que pour tout entier $k \in \{0,1,\ldots,n-1\}$ le vecteur colonne

$$C_k = \begin{bmatrix} 1 \\ w^k \\ w^{2k} \\ \vdots \\ w^{(n-1)k} \end{bmatrix}$$

est vecteur propre de A.

Préciser la valeur propre associée.

b) On fixe n=4. Montrer que A est diagonalisable et préciser une matrice P telle que $D = P^{-1} . A.P$ soit diagonale, écrire la matrice D.

c) Etablir pour n quelconque que A est diagonalisable et préciser P tel que $P^{-1} . A.P$ soit diagonale.

4°) On reprend le problème du déplacement aléatoire d'un point M sur le cercle de centre O, de rayon 1. On généralise la situation étudiée précédemment en envisageant N points sur ce cercle, notés $M_0, \ldots, M_{N-1}$ d'affixe complexe 1, $w, w^2, \ldots w^{N-1}$ où $w = e^{i\,2\pi/N}$

- A l'instant t=0 le point lumineux se trouve en M_0
- Si à l'instant t=n le point lumineux se trouve en M d'affixe $e^{i\theta}$ le point peut se placer à l'instant t = n+1 en M' d'affixe $e^{i(\theta + 2\pi/N)}$ avec la probabilité p ou en M" d'affixe $e^{i(\theta - 2\pi/N)}$ avec la probabilité q = 1-p .

On note $p_0(n), \ldots, p_{N-1}(n)$ les probabilités pour que le point lumineux soit à l'instant n respectivement en $M_0, \ldots M_{N-1}$

et $V_n = \begin{bmatrix} p_0(n) \\ \vdots \\ p_{N-1}(n) \end{bmatrix}$

a) Quelle matrice A permet d'écrire $V_{n+1} = A.V_n$

b) Généraliser les résultats obtenus en B-1°).

Voir annexes page suivante

LOI BINOMIALE $\mathcal{B}(n, p)$

PROBABILITE INDIVIDUELLE : $P[X=k] = C_n^k \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$

$n = 1$

k \ p	10%	20%	30%	40%	50%
0	0.9000	0.8000	0.7000	0.6000	0.5000
1	0.1000	0.2000	0.3000	0.4000	0.5000

$n = 2$

k \ p	10%	20%	30%	40%	50%
0	0.8100	0.6400	0.4900	0.3600	0.2500
1	0.1800	0.3200	0.4200	0.4800	0.5000
2	0.0100	0.0400	0.0900	0.1600	0.2500

$n = 3$

k \ p	10%	20%	30%	40%	50%
0	0.7290	0.5120	0.3430	0.2160	0.1250
1	0.2430	0.3840	0.4410	0.4320	0.3750
2	0.0270	0.0960	0.1890	0.2880	0.3750
3	0.0010	0.0080	0.0270	0.0640	0.1250

$n = 4$

k \ p	10%	20%	30%	40%	50%
0	0.6561	0.4096	0.2401	0.1296	0.0625
1	0.2916	0.4096	0.4116	0.3456	0.2500
2	0.0486	0.1536	0.2646	0.3456	0.3750
3	0.0036	0.0256	0.0756	0.1536	0.2500
4	0.0001	0.0016	0.0081	0.0256	0.0625

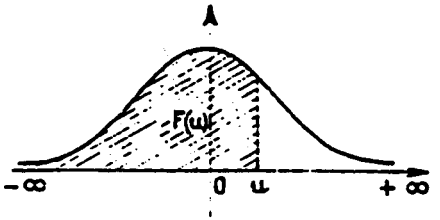
$n = 5$

k \ p	10%	20%	30%	40%	50%
0	0.5905	0.3277	0.1681	0.0778	0.0312
1	0.3280	0.4096	0.3602	0.2592	0.1562
2	0.0729	0.2048	0.3087	0.3456	0.3125
3	0.0081	0.0512	0.1323	0.2304	0.3125
4	0.0004	0.0064	0.0284	0.0769	0.1562
5	0.0000	0.0003	0.0024	0.0102	0.0312

TSVP

FONCTION DE REPARTITION DE LA LOI NORMALE REDUITE

(Probabilité de trouver une valeur inférieure à u)



u	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7290	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9779	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986

Table pour les grandes valeurs de u

u	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,8	4,0	4,5
F(u)	0,99865	0,99904	0,99931	0,99952	0,99966	0,99978	0,999841	0,999928	0,999968	0,999997

Nota - La table donne les valeurs de F(u) pour u positif. Lorsque u est négatif il faut prendre le complément à l'unité de la valeur lue dans la table.

Exemple : pour u = 1,37 F(u) = 0,9147
pour u = - 1,37 F(u) = 0,0853

Revue de Statistique Appliquée — 1990 — Vol. XXXVIII — N° 4

LOI DE POISSON $\mathcal{P}(\lambda)$

PROBABILITE INDIVIDUELLE : $P[X=k] = \dfrac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^k}{k!}$

λ \ k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0,1	0,9048	0,0905	0,0045	0,0002							
0,2	0,8187	0,1637	0,0164	0,0011	0,0001						
0,3	0,7408	0,2222	0,0333	0,0033	0,0003						
0,4	0,6703	0,2681	0,0536	0,0072	0,0007	0,0001					
0,5	0,6065	0,3033	0,0758	0,0126	0,0016	0,0002					
0,6	0,5488	0,3293	0,0988	0,0198	0,0030	0,0004					
0,7	0,4966	0,3476	0,1217	0,0284	0,0050	0,0007	0,0001				
0,8	0,4493	0,3595	0,1438	0,0383	0,0077	0,0012	0,0002				
0,9	0,4066	0,3659	0,1647	0,0494	0,0111	0,0020	0,0003				
1,0	0,3679	0,3679	0,1839	0,0613	0,0153	0,0031	0,0005	0,0001			
1,5	0,2231	0,3347	0,2510	0,1255	0,0471	0,0141	0,0035	0,0008	0,0001		
2	0,1353	0,2707	0,2707	0,1804	0,0902	0,0361	0,0120	0,0034	0,0009	0,0002	
2,5	0,0821	0,2052	0,2565	0,2138	0,1336	0,0668	0,0278	0,0099	0,0031	0,0009	0,0002
3	0,0498	0,1494	0,2240	0,2240	0,1680	0,1008	0,0504	0,0216	0,0081	0,0027	0,0008
3,5	0,0302	0,1057	0,1850	0,2158	0,1888	0,1322	0,0771	0,0385	0,0169	0,0066	0,0023
4	0,0193	0,0733	0,1465	0,1954	0,1954	0,1562	0,1042	0,0595	0,0298	0,0132	0,0053
4,5	0,0111	0,0500	0,1125	0,1687	0,1898	0,1708	0,1281	0,0824	0,0463	0,0232	0,0104
5	0,0067	0,0337	0,0842	0,1404	0,1755	0,1755	0,1462	0,1044	0,0653	0,0363	0,0181

λ \ k	11	12	13	14	15	16
1,5						
2						
2,5						
3	0,0002	0,0001				
3,5	0,0007	0,0002	0,0001			
4	0,0019	0,0006	0,0002	0,0001		
4,5	0,0043	0,0016	0,0006	0,0002	0,0001	
5	0,0082	0,0034	0,0013	0,0005	0,0002	0,0001

FIN

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail